I - Détermination expérimentale des caractéristiques d'une bobine

1) Il faut que la période T soit supérieure à 10τ (plus de 5τ pour la charge et plus de 5τ pour la décharge) pour observer des charges/décharges complètes. Or, le circuit possède une résistance totale :

$$R_{eq} = R_g + r + R_0 = 4 \text{ ou } 7\,\Omega$$

Prenons le plus petit R_{eq} car c'est lui qui donnera le plus grand τ. Avec $L = 1$ H, on obtient une constante de temps :

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = 0,25 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T \geq 2,5 \text{ s}}$$

2) On regarde sur le second graphique quand est-ce que la tension atteint 63 % de sa valeur finale (ie. $u = 6,3$ V). On trouve :

$$\boxed{\tau_1 = 63 \text{ ms} \quad \text{et} \quad \tau_1 = 102 \text{ ms}}$$

3) On sait que, pour $n = 1$ ou 2 :

$$\tau_n = \frac{L}{R_g + r + R_{0n}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{R_g + r + R_{02}}{R_g + r + R_{01}}$$

On isole r :

$$r\left(\tau_2 - \tau_1\right) = \tau_1\left(R_g + R_{01}\right) - \tau_2\left(R_g + R_{02}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \frac{\tau_1\left(R_g + R_{01}\right) - \tau_2\left(R_g + R_{02}\right)}{\tau_2 - \tau_1} = 1,8\,\Omega}$$

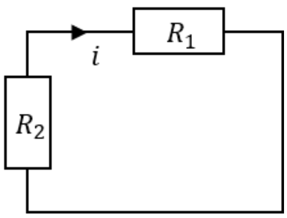
4) On en déduit :

$$\boxed{L = \tau_1\left(R_g + r + R_{01}\right) = \tau_2\left(R_g + r + R_{02}\right) = 0,49\,\Omega}$$

- Fin de la partie I -

II - Étude d'une inductance

5) En $t = 0^-$, la bobine est équivalente à un fil et l'interrupteur est ouvert.



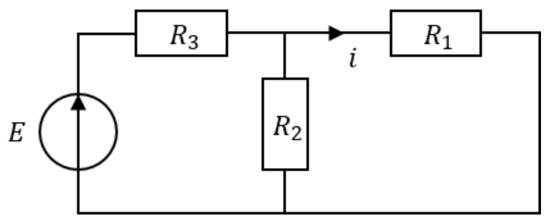
Une loi des mailles donne donc :

$$0 = (R_1 + R_2) \times i\big(0^-\big) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i\big(0^-\big) = 0}$$

Par continuité de l'intensité à travers une bobine,

$$\boxed{i\big(0^+\big) = 0}$$

6) En $t \to +\infty$, la bobine est équivalente à un fil. Le circuit équivalent est :



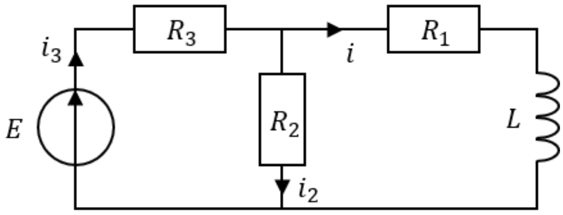
La résistance équivalente de l'ensemble du circuit vaut :

$$R_{eq} = R_3 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le générateur est alors parcouru par un courant d'intensité $i_3 = R/R_{eq}$. On applique finalement la formule du pont diviseur de courant :

$$i = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, i_3 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}\, \frac{1}{R_3 + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}\, E = \boxed{\frac{R_2 E}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3} = i_\infty}$$

7) Notation :



Voici l'ensemble des relations à notre disposition :

$$\begin{cases} E = u_{R_1} + u_L + u_{R_3} & (1) \\ u_{R_2} = u_{R_1} + u_L & (2) \\ i_3 = i + i_2 & (3) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{R_1} = R_1 i & (4) \\ u_{R_2} = R_2 i_2 & (5) \\ u_{R_3} = R_3 i_3 & (6) \\ u_L = L\,\dfrac{di}{dt} & (7) \end{cases}$$

On cherche une ED sur i :

$$i \underset{(3)}{\underset{\uparrow}{=}} i_3 - i_2 \underset{(5,6)}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{u_{R_3}}{R_3} - \frac{u_{R_2}}{R_2} \underset{(1,2)}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{E - u_{R_1} - u_L}{R_3} - \frac{u_{R_1} + u_L}{R_2} \underset{(4,7)}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{R_3}\left[E - R_1 i - L\,\frac{di}{dt}\right] - \frac{1}{R_2}\left[R_1 i + L\,\frac{di}{dt}\right]$$

On regroupe les termes :

$$\frac{E}{R_3} = \frac{di}{dt}\left(\frac{L}{R_3} + \frac{L}{R_2}\right) + i\left(1 + \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{R_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{i_\infty}{\tau}}$$

8) La forme générale de la solution est :

$$i(t) = A\, e^{-t/\tau} + i_\infty$$

Avec la condition initiale :

$$i(0^+) = A + i_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -i_\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = i_\infty\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

9) Le nouveau circuit ne contient qu'une seule maille. La loi des mailles donne :

$$0 = (R_1 + R_3)\, i + L\,\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau_2} = 0 \quad \text{avec :} \quad \tau_2 = \frac{R_1 + R_3}{L}}$$

10) L'intensité (qui est continue lorsque l'on ouvre l'interrupteur) vaut initialement de i_∞ (lorsque $t = T$). On en déduit l'énergie initialement stockée dans la bobine :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{El}} = \frac{1}{2} L i_\infty^2}$$

Cette énergie est entièrement cédée aux résistances, puisque l'intensité vaut 0 lorsque $t \to \infty$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{Joule}} = \frac{1}{2} L i_\infty^2}$$

------------------------------------ Fin de la partie II ------------------------------------

III - Circuits RL en série

11) On a les deux relations :

$$\begin{cases} u_L = L\,\dfrac{di}{dt} & \Rightarrow \quad \text{Tension} = [L]\cdot\dfrac{\text{Intensité}}{\text{Temps}} \\ u_R = R\,i & \Rightarrow \quad \text{Tension} = [R]\cdot\text{Intensité} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\left[\frac{L}{R}\right] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{\text{Tension}\times\text{Temps}/\text{Intensité}}{\text{Tension}/\text{Intensité}} = \text{Temps} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \beta = -1}$$

12) Loi des mailles :

$$\boxed{E = u_R + u_L = Ri + L\,\frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L} \quad \text{avec :} \quad \tau = \frac{L}{R}}$$

La solution est :

$$i(t) = A\,e^{-t/\tau} + \frac{E}{R}$$

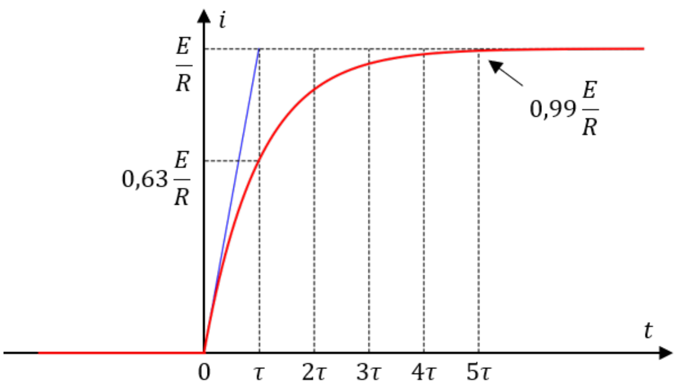
Par continuité de l'intensité :

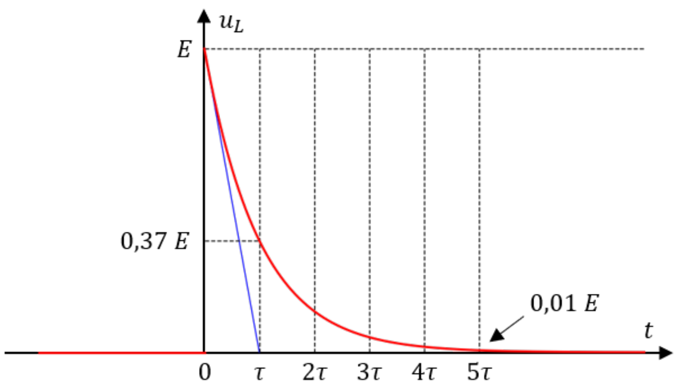
$$i(0^+) = 0 = A + \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Enfin,

$$\boxed{u_L(t) = L\,\frac{di}{dt} = E\,e^{-t/\tau}}$$

13) Graphes :





Les fonctions tendent vers :

$$\boxed{i(t\to\infty) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad u_L(t\to\infty) = 0}$$

Les tangentes à l'origine valent :

$$\boxed{\frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L} \quad \text{et} \quad \frac{du_L}{dt}(0^+) = -\frac{E}{\tau}}$$

14) L'équation différentielle sur i est la même en remplaçant E par 0.

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad i(t) = A\,e^{-t/\tau}$$

Or, la continuité de l'intensité en $t = \frac{T}{2}$ donne :

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-T/2\tau}\right) = A\,e^{-T/2\tau} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{E}{R}\left(e^{T/2\tau} - 1\right)$$

Ainsi,

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(e^{T/2\tau} - 1\right)\, e^{-t/\tau}}$$

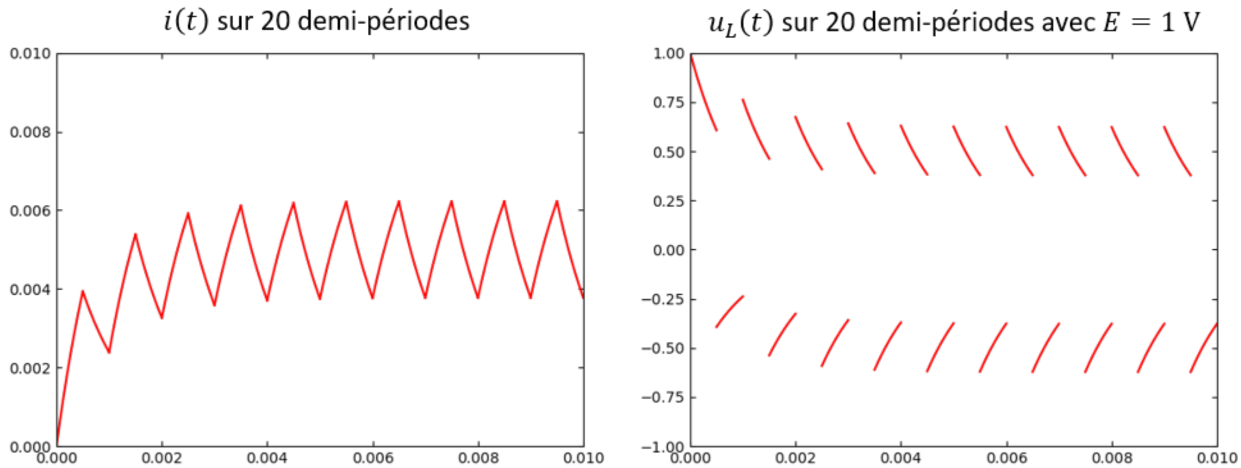
On en déduit :

$$\boxed{u_L(t) = L\,\frac{di}{dt} = E\left(1 - e^{T/2\tau}\right)\, e^{-t/\tau}}$$

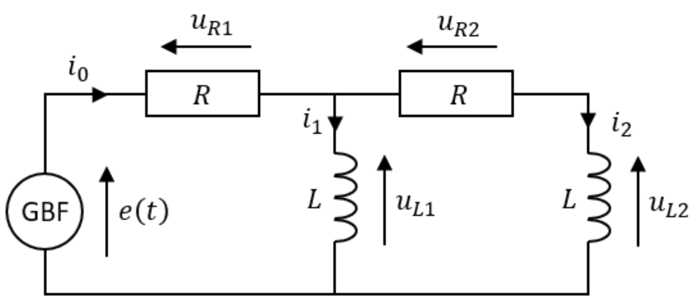
15) On a :

$$T = \frac{1}{f} = 1\ \text{ms} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{L}{R} = 1\ \text{ms} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \tau = 1\ \text{ms}}$$

On en déduit le graphe (tension en volt et temps en seconde) :



16) Notations :



Voici l'ensemble des relations à notre disposition :

$$\begin{cases} E = u_{R1} + u_{L1} & (1) \\ u_{L1} = u_{R2} + u_{L2} & (2) \\ i_0 = i_1 + i_2 & (3) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{R1} = Ri_0 & (4) \\ u_{R2} = Ri_2 & (5) \\ u_{L1} = L\,\dfrac{di_1}{dt} & (6) \\ u_{L2} = L\,\dfrac{di_2}{dt} & (7) \end{cases}$$

On cherche une ED sur i_2 :

$$E \underset{\underset{(1,2)}{\uparrow}}{=} u_{R1} + u_{R2} + u_{L2} \underset{\underset{(4,5,7)}{\uparrow}}{=} Ri_0 + Ri_2 + L\,\frac{di_2}{dt} \underset{\underset{(3)}{\uparrow}}{=} Ri_1 + 2Ri_2 + L\,\frac{di_2}{dt}$$

On dérive cette expression :

$$0 = R\,\frac{di_1}{dt} + 2R\,\frac{di_2}{dt} + L\,\frac{d^2i_2}{dt^2} \underset{\underset{(6)}{\uparrow}}{=} \frac{R}{L}\,u_{L1} + 2R\,\frac{di_2}{dt} + L\,\frac{d^2i_2}{dt^2} \underset{\underset{(2,5,7)}{\uparrow}}{=} \frac{R}{L}\left(Ri_2 + L\,\frac{di_2}{dt}\right) + 2R\,\frac{di_2}{dt} + L\,\frac{d^2i_2}{dt^2}$$

On regroupe les termes :

$$\boxed{\frac{d^2 i_2}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{di_2}{dt} + \omega_0^2 \, i_2 = 0 \quad \text{avec :} \quad \omega_0 = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{3}}$$

ω_0 est la pulsation propre du système.

17) Par continuité de l'intensité à travers une bobine :

$$i_1(0^+) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{i_2(0^+) = 0} \quad \underset{(3)}{\Rightarrow} \quad i_0(0^+) = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{di_2}{dt}(0^+) \underset{(7)}{=} \frac{u_{L2}(0^+)}{L} \underset{(1,2,4,5)}{=} \frac{E}{L}}$$

On est en régime apériodique car $Q < 1/2$. La forme générale de la solution est :

$$i_2(t) = e^{-\lambda t}\Big[A \,\text{ch}(\Omega t) + B \,\text{sh}(\Omega t)\Big]$$

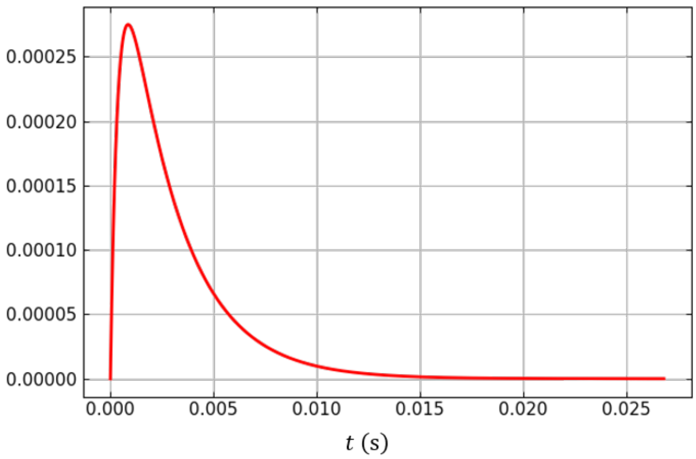
Avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} i_2(0^+) = A = 0 \\ \dfrac{di_2}{dt}(0^+) = -\lambda A + \Omega B = \dfrac{E}{L} \quad \Rightarrow \quad B = \dfrac{E}{\Omega L} \end{cases}$$

On en déduit donc :

$$\boxed{i_2(t) = \frac{E}{\Omega L} \,\text{sh}(\Omega t)\, e^{-\lambda t}}$$

Graphe :



----------------------------------- Fin de la partie III -----------------------------------

IV - Circuit oscillant R(LC)

18) Le condensateur se comporte comme un circuit ouvert : $\boxed{i_C(0^-) = 0}$ et la bobine comme un fil : $\boxed{u(0^-) = 0}$.

L'interrupteur étant ouvert : $i_R(0^-) = 0$, la loi des nœuds donne : $\boxed{i_L(0^-) = 0}$.

19) Par continuité :

$$\boxed{i_L(0^+) = 0} \quad \text{et} \quad u(0^+) = 0$$

Or,

$$\dot{u} = \frac{i_C}{C} = \frac{i_R - i_L}{C} \quad \text{et} \quad E = Ri_R + u \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{u}(0^+) = \frac{E}{RC}}$$

20) On par d'une loi des mailles :

$$E = Ri_R + u = R\,(i_C + i_L) + u = R\,(C\,\dot{u} + i_L) + u$$

On dérive cette expression :

$$0 = RC\,\ddot{u} + \frac{R}{L}\,u + \dot{u} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{u} + \frac{\dot{u}}{RC} + \frac{u}{LC} = 0}$$

On identifie alors :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

21) Il faut $\boxed{Q > 1/2}$ pour être dans le régime pseudo-périodique. Il faut $\boxed{Q = 1/2}$ pour avoir un retour vers l'équilibre le plus rapide possible (régime critique).

- Fin de la partie IV -

V - Détermination de l'écart angulaire entre deux étoiles

22) On a :

$$S_1 = \begin{pmatrix} d/2 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} \quad S_2 = \begin{pmatrix} -d/2 \\ 0 \\ -L \end{pmatrix} \quad O_1 = \begin{pmatrix} a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad O_2 = \begin{pmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ D \end{pmatrix}$$

V.1 - Figure d'interférence crée par une étoile seule

23) On a :

$$(O_1M) = O_1M = \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\,\sqrt{\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \simeq D\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x - \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2\right]$$

On a de même,

$$(O_2M) = O_2M = \sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + D^2} = D\,\sqrt{\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2} \simeq D\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x + \frac{a}{2}}{D}\right)^2 + \left(\frac{y}{D}\right)^2\right]$$

On en déduit :

$$\boxed{\delta_{1a} = (O_1M) - (O_2M) = -\frac{ax}{D}}$$

24) On doit calculer : $\delta_{1b} = (S_1O_1) - (S_1O_2) = (O_1S_1) - (O_1S_2)$. Le calcul est donc identique à celui de la question précédente, à condition de substituer $M \to S_1$, c'est-à-dire de substituer $x \to d/2$, $y \to 0$ et $D \to L$. On en déduit :

$$\boxed{\delta_{1b} = (S_1O_1) - (S_1O_2) = -\frac{ad}{2L}}$$

25) On a :

$$\boxed{\delta_1 = (S_1O_1M) - (S_1O_2M) = \delta_{1a} + \delta_{1b} = -\frac{ax}{D} - \frac{ad}{2L}}$$

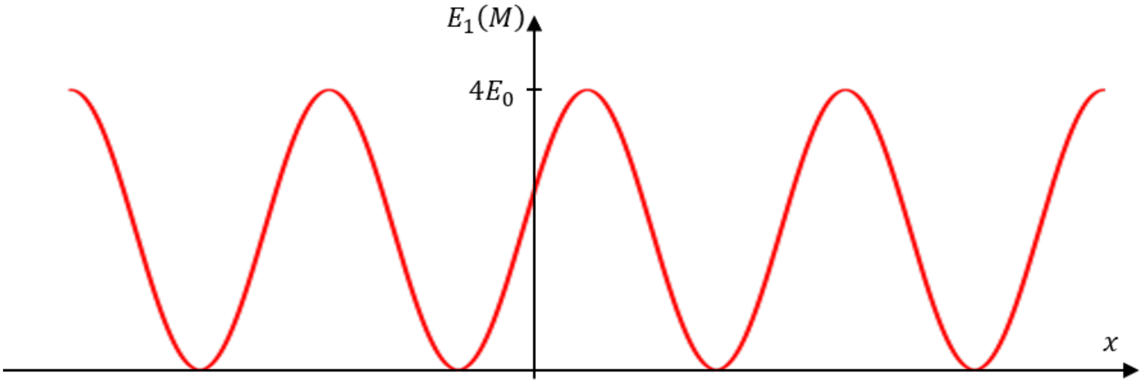
26) L'éclairement est proportionnel à la moyenne temporelle de l'amplitude au carré de l'onde :

$$\boxed{E = k\,\langle A^2 \rangle}$$

27) Formule de Fresnel :

$$\boxed{E_1(x) = 2E_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta_1}{\lambda}\right)\right] = 2E_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} + \frac{\pi ad}{\lambda L}\right)\right]}$$

28) On observe des franges rectilignes en $x = cte$.



29) L'interfrange est la distance entre deux maxima, ou la période du signal $E_1(x)$, donc :

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

V.2 - Figure d'interférence crée par les deux étoiles

30) Par symétrie du problème, on a immédiatement que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{2a} = \delta_{1a} \\ \delta_{2b} = -\delta_{1b} \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta_2 = -\frac{ax}{D} + \frac{ad}{2L}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_2(x) = 2E_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} - \frac{\pi ad}{\lambda L}\right)\right]}$$

31) Avec le formulaire, on a immédiatement que :

$$\boxed{E_{tot}(x) = E_1(x) + E_2(x) = 4E_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right) \cos\left(\frac{\pi ad}{\lambda L}\right)\right]}$$

32) On souhaite trouver la plus petite valeur de a qui annule le deuxième cosinus, puisqu'on aura dans ce cas un éclairement uniforme $E_{tot}(x) = 4E_0$ sur tout l'écran.

$$\cos\left(\frac{\pi ad}{\lambda L}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi a_n d}{\lambda L} = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad \text{avec :} \quad n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi a_{min} d}{\lambda L} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{min} = \frac{\lambda L}{2d}}$$

33) En faisant l'approximation des petits angles :

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2} = \frac{d/2}{L} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = \frac{d}{L} = \frac{\lambda}{2a_{min}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}}$$

Cet angle est légèrement inférieur à la limite de résolution de l'œil $\alpha_{min} = 3 \cdot 10^{-4}$ rad. Les étoiles sont donc indiscernables à l'œil nu.

------------------------------------ Fin de la partie V ------------------------------------